Begründung der Lorentz-Gruppe allein mit Symmetrie- und Relativitäts-Annahmen

G. SÜSSMANN

Sektion Physik der Universität München

(Z. Naturforsch. **24 a**, 495—498 [1969]; eingegangen am 22. November 1968)

Aus dem Relativitätsprinzip folgt ohne Verwendung des empirischen Prinzips von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, daß die Lorentz-Transformation die einzig denkbare Alternative zur (raumzeitlich asymmetrischen) Galilei-Transformation ist.

Es scheint wenig bekannt zu sein, daß in Einsteins klassischer Herleitung der Lorentz-Transformation [1] die Voraussetzungen erheblich abgeschwächt werden können. Ohne Verwendung des Einsteinschen Prinzips von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit läßt sich aus den übrigen Annahmen Einsteins herleiten, daß es eine (möglicherweise unendliche) Naturkonstante c_0 gibt, welche die Rolle einer invarianten Grenzgeschwindigkeit spielt. Die Struktur der Lorentz-Gruppe folgt bereits aus der nur qualitativen Hypothese $c_0 < \infty$. Als quantitatives Problem bleibt die Frage, ob das Licht im Vakuum genau die Geschwindigkeit c_0 besitzt.

Wenn im folgenden auf die „Einsteinsche Ableitung" Bezug genommen wird, so ist nicht wörtlich der Text von 1905 gemeint, sondern eine vereinfachte Variante wie die in MøLLERs Monographie [2], ergänzt durch geometrische Symmetrieerwägungen. In diesem Sinne darf gesagt werden, daß Einsteins Argumentation auf folgenden Annahmen beruht:

(0.) Isotropie und Flachheit (a) des Raumes und (b) der Zeit,

(1.) Relativität des Begriffs der Geschwindigkeit,

(2.) Absolutheit des Betrags der Lichtgeschwindigkeit.

Die rein geometrischen und die rein chronologischen Axiome wurden von Einstein nicht ausdrücklich genannt, aber wesentlich verwendet. Zu der hier angegebenen Formulierung des 0. Prinzips sei folgendes bemerkt.

(a) Aus der Isotropie des Raumes folgt seine Homogenität; denn wenn alle Richtungen von jedem Punkte aus geometrisch gleich gelagert sind, können keine zwei Punkte geometrisch verschieden gelagert sein, weil ja dann die Verbindungslinien zu jedem festen Punkt verschiedenartig wären [3]. Der umgekehrte Schluß von der Homogenität auf die Isotropie kann nicht gezogen werden, wie man an den periodischen Flachräumen (Hyperzylinder, Zylindertorus, Hypertorus) erkennt: sie sind offenbar homogen, aber nicht isotrop. Ein isotroper Raum muß konstante Krümmung K_0 besitzen [4], und im Falle fehlender Krümmung darf er nicht periodisch sein. Der elliptische Fall $K_0 > 0$ widerspricht den schon immer benutzten, aber erst 1882 (durch M. Pasch) kodifizierten Anordnungsaxiomen. Wenn

[1] A. EINSTEIN, Ann. Phys. **17**, 891 [1905].

[2] C. MøLLER, The Theory of Relativity, Clarendon Press, Oxford 1952, § 17.

[3] H. FREUDENTHAL, Adv. Math. **1**, 145 [1964].

[4] Das hat als erster SCHUR bewiesen [5]. Räume variabler Krümmung wurden bekanntlich durch RIEMANN [1854] konzipiert [6]. HELMHOLTZ bewies danach die Konstanz der Krümmung aus der Annahme frei beweglicher starrer Körper [7]. Die mathematischen Unvollkommenheiten der Helmholtzschen Deduktion veranlaßten LIE zur Theorie der Lieschen Gruppen [8], die für die Teilchenphysik so bedeutsam geworden ist. In unserem Jahrhundert wurde das „Helmholtzsche Raumproblem" vor allem durch WEYL gefördert [9]. Eine neuere Charakterisierung der Riemannschen Geometrie durch eine differentielle Symmetrieeigenschaft hat LAUGWITZ [10] gegeben. Ein Vorzug der beliebigen Riemannschen Räume vor den isotropen läßt sich durch geometrische Symmetrie- oder Relativitäts-Postulate allein nicht begründen. Erst die „qualitative Symmetrieforderung" einer Rückwirkung der ponderablen Materie auf den Raum kann hier helfen. THIRRING hat 1961 gezeigt, daß man die raumzeitlichen Anisotropien der Einsteinschen Relativitätstheorie als materiebedingte Renormierungseffekte eines tensoriellen Gravitationsfeldes in einer „isotropen" Raumzeit auffassen kann [11]. Wir beschränken uns jetzt auf die Näherung eines materiefreien Raumes.

[5] F. SCHUR, Math. Ann. **27**, 163, 537 [1886].

[6] G. F. B. RIEMANN, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen (Habilitationsvortrag 1854), Abhandl. kgl. Ges. Wiss. zu Göttingen **13** [1867], Reprint Darmstadt 1959.

[7] H. v. HELMHOLTZ, Über die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen, Göttinger gelehrte Nachrichten [1868], S. 193–221.

[8] M. S. LIE, Theorie der Transformationsgruppen, B. G. Teubner, Leipzig 1888–1893.

[9] H. WEYL, Mathematische Analyse des Raumproblems, Berlin 1923, Abdruck Darmstadt 1963.

[10] D. LAUGWITZ, Z. Naturforsch. **9 a**, 827 [1954]; Math. Z. **61**, 235 [1954]; Differentialgeometrie, Teubner, Stuttgart 1960, § 15.

[11] W. E. THIRRING, Ann. Physics New York **16**, 96 [1961].

z. B. auf einer „vertikalen" Geraden der Punkt A unterhalb B und der Punkt B unterhalb C liegt, so soll auch A unterhalb des Punktes C liegen. Diese und ähnliche *lokale* Erfahrungen brauchen *global* (oder „kosmisch") nicht mehr zu gelten. Das hat auch eine topologische Konsequenz: der Raum könnte offen und kompakt zugleich sein. Gemäß der hypersphärischen (oder dielliptischen) Geometrie besitzt das Gesamtvolumen der Welt den endlichen Wert $2\pi^2 R_0$, wenn $R_0 := K_0^{-1/2}$ ist. Nach der semi-hypersphärischen (oder elliptischen) Geometrie, die aus der vorherigen durch Identifikation antipodischer Punkte hervorgeht, ist das Weltvolumen bei gleichem Weltradius R_0 nur halb so groß. Bei Gültigkeit der durch $K_0 \leqq 0$ charakterisierten „absoluten" Geometrie ist der Raum nichtkompakt, sein Volumen unendlich groß. Ein qualitatives Argument zugunsten der pseudosphärischen (oder hyperbolischen) Geometrie ist mir nicht bekannt. Der Grenzfall $K_0 = 0$ der euklidischen (oder parabolischen) Geometrie kann durch die Forderung der Invarianz gegen Maßstabsänderungen ausgezeichnet werden. Diese Symmetrieforderung ist allerdings sehr fraglich; denn in der Atomphysik ist offenbar eine „elementare" Länge $l_0 = \hbar/c_0 m_0$ ausgezeichnet. Da eine „räumliche Eichinvarianz" jedenfalls im Kleinen nicht besteht, vermag das vielgenannte Argument für einen objektiven Vorzug der euklidischen Geometrie nicht zu überzeugen. Unbestreitbar ist die größere Bequemlichkeit des flachen Raumes. Wenn wir uns auf die mikroskopische Physik beschränken, ist die Flachheitsannahme $K_0 = 0$ wegen $|K_0| \cdot l_0^2 \ll 1$ gewiß eine gute Näherung. Damit erhält der Raum die *pythagoräische Metrik* [12] der *euklidischen Geometrie* mit ihren *cartesischen Koordinatensystemen.*

(b) Entsprechend erhält die Zeit die *hipparchische Metrik* der *aristotelischen Chronologie* mit ihren *keplerschen Kalendersystemen.* Diese Nomenklatur bezweckt lediglich, die verschiedenen Analogien zwischen Raum, Zeit und Raumzeit zu verdeutlichen.

Herzuleiten ist für die vereinigte Raumzeit die *minkowskische Metrik* der *poincaréschen Kinematik* [13] mit ihren *einsteinschen Inertialsystemen.*

Das Relativitätspostulat (1.) zeichnet die gradlinigen Weltlinien als *gleichförmige Bewegungen* im Sinne des Trägheitsgesetzes aus, und es behauptet ihre metrische oder kinematische [13] Gleichartigkeit. Das ist eine Art von Isotropieaussage hinsichtlich der zulässigen Zeitachsen.

Die Einsteinsche Deduktion zieht aus allen diesen Symmetrieannahmen folgende Reihe von Schlüssen. (A) Da die Trägheitsbahnen des „ursprünglichen" Inertialsystems $J = (x, y, z, t)$ in Trägheitsbahnen des neuen Systems $J' = (x', y', z', t')$ übergehen sollen, müssen die Transformationsfunktionen *linear* sein. (B) Wegen der Homogenität der Raumzeit kann man die Nullpunkte von J und J' ohne weiteres koinzidieren lassen, so daß die lineare Transformation L *homogen* wird. (C) Auf Grund der räumlichen Isotropie kann man z. B. die z-Achse in oder gegen die Richtung der Relativgeschwindigkeit (u, v, w) legen, so daß $u = v = 0$ wird. Die z'-Achse soll in die genau gleiche Richtung gelegt werden. (D) Wegen der Achsialsymmetrie der Anordnung muß das Variablenpaar (z, t) vom Rest (x, y) entkoppelt sein. Es muß also ein Gleichungspaar

$$z' = \alpha_w z + \beta_w t, \qquad t' = \gamma_w z + \delta_w t \tag{1}$$

bestehen. (E) Die vier Koeffizienten α_w, β_w, γ_w, δ_w können aus den verwendeten Isotropie- und Homogenitäts-Gründen nur von w abhängen. Da dies die longitudinale Geschwindigkeit von J' relativ zu J sein soll, muß die Beziehung

$$\beta_w = -w\,\alpha_w \tag{2}$$

bestehen [14]. (F) Wegen der gegenseitigen Symmetrie von J' und J muß sich J relativ zu J' mit der entgegengesetzten Geschwindigkeit $-w$ bewegen. Deswegen muß die Gleichung

$$\beta_w = -w\,\delta_w \tag{3}$$

gelten [15]. (G) Durch konforme Orientierung der Zeitachse kann man erreichen, daß

$$\alpha_w = \delta_w > 0 \tag{4}$$

bleibt. Dann muß insbesondere $\alpha_0 = \delta_0 = 1$ und $\beta_0 = \gamma_0 = 0$ sein. (H) Aus der $J - J'$-Symmetrie folgt, daß die Determinante $\alpha_w \delta_w - \beta_w \delta_w$ gleich ihrer Inversen sein muß:

$$\alpha_w^2 + w\,\alpha_w \gamma_w = 1\,, \tag{5}$$

[12] Den pythagoräischen Lehrsatz scheinen die Geodäten des Ein- und Zweistromlandes empirisch gefunden zu haben. Pythagoras bewies ihn geometrisch, also im wesentlichen mit Symmetrie- und Parallelismus-Vorstellungen. Zum Dank für diese Entdeckung opferte er den Göttern eine Hekatombe Ochsen (weshalb nach Kant bei jedem Umbau der Wissenschaft die Ochsen zittern).

[13] Kinematik = Geochronologie = Chronogeometrie.

[14] $z' = 0 \Rightarrow w = dz/dt = -\beta_w/\alpha_w$.

[15] $z = 0 \Rightarrow -w = dz'/dt' = \beta_w/\delta_w$.

weil -1 aus Stetigkeitsgründen ausscheidet. Es bleibt hier also nur noch die zunächst für $w \neq 0$ definierte Funktion

$$\varepsilon_w := \frac{-\gamma_w}{w\,\alpha_w} \tag{6}$$

zu bestimmen, weil dann

$$\alpha_w = \delta_w = \frac{1}{\sqrt{1-w^2\,\varepsilon_w}}, \tag{7}$$
$$\beta_w = \frac{-w}{\sqrt{1-w^2\,\varepsilon_w}}, \qquad \gamma_w = \frac{-w\,\varepsilon_w}{\sqrt{1-w^2\,\varepsilon_w}}$$

wird. (I) Das Achsenkreuz (x', y') können wir wegen der Achsialsymmetrie in die Richtung von (x, y) fallen lassen. Folglich müssen die separierten Gleichungen

$$x' = \lambda_w\, x\,, \qquad y' = \lambda_w\, y \tag{8}$$

mit positivem λ_w bestehen. (J) Wegen der $(J-J')$-Symmetrie muß λ_w mit seiner Inversen $\lambda_w^{-1} = \lambda_{-w}$ übereinstimmen; es muß also

$$\lambda_w = 1 \tag{9}$$

sein.

Spätestens an dieser Stelle bricht in der Einsteinschen Herleitung die gruppentheoretische Analyse ab. Fortgeführt wird die Überlegung mittels des Prinzips (2.) von der Invarianz der Lichtkegel. Für den vom gemeinsamen Koordinaten-Nullpunkt ausgehenden Lichtkegel ist das die Implikation

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2\, t^2 = 0 \Rightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2\, t'^2 = 0\,.$$

Eine ziemlich einfache Rechnung zeigt dann, daß $\varepsilon_w = c^{-2}$ sein muß, womit die spezielle Lorentz-Transformation dasteht.

Aber die Gruppentheorie kann weitergeführt werden: Man kann die Existenz und formale Gleichheit der Gruppenprodukte $L_w \circ L_{w'} = L_{w''}$ ausnützen, so wie bisher die Existenz und formale Gleichheit der Inversen $L_w^{-1} = L_{-w}$ verwendet wurde. Selbstverständlich bleibt die *Form* des Additionstheorems

$$w'' = w''(w, w')$$

zunächst ganz offen. Benützt wird lediglich die *Existenz* einer zusammengesetzten Relativgeschwindigkeit $w'' = w \circ w'$ mit der *Bedeutung* einer longitudinalen Relativgeschwindigkeit des dritten Inertialsystems J'' gegen J, wenn w' die longitudinale Geschwindigkeit von J'' gegen J' bezeichnet. Setzt man das Analogon von (7), (1) mit w' statt w in (7), (1) ein, so muß das w''-Analogon resultieren. Als notwendig und hinreichend insbesondere für das Bestehen der zu (4) analogen Gleichung $\alpha_{w''} = \delta_{w''}$ erweist sich die Konstanz $\varepsilon_w = \varepsilon_{w'}$ oder

$$\varepsilon_w = \varepsilon_0\,. \tag{10}$$

Demnach ist

$$x' = x,\ y' = y,\ z' = \frac{z - w\,t}{\sqrt{1-\varepsilon_0\, w^2}},\ t' = \frac{t - \varepsilon_0\, w\, z}{\sqrt{1-\varepsilon_0\, w^2}} \tag{11}$$

mit einer reellen Konstanten ε_0.

Der „elliptische" Fall $\varepsilon_0 < 0$ widerspricht der Vorzeichenaussage in (4) und muß daher ausscheiden [16]. Er scheitert an folgendem „Anordnungsaxiom für den Geschwindigkeitsraum": Wenn J'' relativ zu J' nach oben läuft und J' relativ zu J ebenfalls nach oben, so muß auch J'' relativ zu J nach oben laufen.

Der „parabolische" Fall $\varepsilon_0 = 0$ ist nichts anderes als die *spezielle Galilei-Transformation*

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z - w\,.\,t\,, \quad t' = t\,. \tag{12}$$

Dadurch wird für die vereinigte Raumzeit die *Bernoullische Metrik* der *Newtonschen Kinematik* mit ihren *Huygensschen Inertialsystemen* konstituiert. Um sie auszuschließen, kann man sich auf die naheliegende Forderung einer „qualitativen Symmetrie" zwischen Raum und Zeit berufen, der gemäß die eine Zeitdimension von den drei Raumdimensionen hinsichtlich der Relativität der Abstände nicht qualitativ verschieden sein soll. Denn während die *Kollokalität* $(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$ zweier Ereignisse E_1, E_2 von der Wahl des Inertialsystems abhängt (Relativität des Ruhe-Begriffs), ist ihre *Simultanität* $t_1 = t_2$ sehr wohl galileiinvariant (Absolutheit des Gleichzeitigkeitsbegriffs).

Im „hyperbolischen" Fall $\varepsilon_0 > 0$ erhält man die *spezielle Lorentz-Gruppe*, nach Adjunktion der Raumdrehungen die *(eigentliche, orthochrone) Lorentz-Gruppe*, nach zusätzlicher Adjunktion der Translationen die *(eigentliche, orthochrone) Poincaré-Gruppe*, und schließlich nach Adjunktion der Inversion und der Reversion die *volle Poincaré-Gruppe*. Das gilt hinsichtlich der abstrakten Gruppenstruktur unabhängig vom Zahlenwert der kinematischen Fundamentalkonstanten

$$c_0 := 1/\sqrt{\varepsilon_0}\,, \tag{13}$$

die offenbar die Rolle einer *Grenzgeschwindigkeit*

[16] Wir haben es hier nämlich mit (reellen) Drehungen in der $(z, \varkappa_0\, t)$-Ebene zu tun, wenn $\varkappa_0 := (-\varepsilon_0)^{-1/2}$ ist.

spielt [17]. Erfahrungsgemäß liegt sie sehr nahe an der Geschwindigkeit des Lichtes im Vakuum. Doch ist die (wohl zuerst von de Broglie propagierte) Hypothese einer positiven, wenn auch sicher sehr kleinen Photonenmasse m_γ nicht auszuschließen. Nach dieser Annahme liegt die Vakuumgeschwindigkeit $c = c(\omega)$ des sichtbaren Lichtes dicht unterhalb der Grenzgeschwindigkeit $c_0 = c(\infty)$.

Wie dem auch sei: bei den Problemen von Raum und Zeit sollte es als besonders wünschenswert gelten, möglichst viele Aussagen allgemeinen Symmetrieprinzipien zu entnehmen und die konkrete Empirie erst danach einzuführen. Im Idealfalle sollte die Erfahrung nur dazu dienen, qualitative Entscheidungen zu fällen, und das Experiment sollte sich damit begnügen, die Maßstäbe zu vergleichen und einzelne Naturkonstanten zu messen. Zur Erforschung und Ausmessung komplexer Strukturen sollten sie nicht unnötig herangezogen werden. Es ist daher recht befriedigend, daß Einsteins Ableitung der Poincaré-Gruppe, die von der quadratischen Gleichung der Lichtblitze wesentlich Gebrauch machte, zu einer nur mit den linearen Gleichungen der Trägheitsbahnen arbeitenden Deduktion vereinfacht werden kann [19]. In jeder Herleitung spielen Symmetrie-Annahmen eine entscheidende Rolle, aber erst in der hier vorgetragenen werden sie voll ausgeschöpft. Zudem wird die Rechnung einfacher *.

[17] Die Möglichkeit von „Tachyonen", hypothetischen Teilchen imaginärer Masse, wird dadurch ebenso wenig ausgeschlossen wie die von Teilchen verschwindender Masse [18]. Erst das Einsteinsche Kausalitätsprinzip verbietet Teilchen mit Geschwindigkeiten $v > c_0$. Die Relativgeschwindigkeit w von *Inertialsystemen* muß allerdings sogar *kleiner* als c_0 bleiben. Das drückt die Nichtkompaktheit der Lorentz-Gruppe aus.

[18] G. Feinberg, Phys. Rev. **159,** 1089 [1967].

[19] Aharoni [20] schließt aus Dimensionsbetrachtungen auf die Existenz einer Naturkonstanten c der metrologischen Dimension Länge : Zeit, die er als konstante Geschwindigkeit von „Signalen" deutet. Dieses Argument ist nicht schlüssig, denn aus Maßstabsbetrachtungen kann sicher nicht auf die Invarianz von „Signalkegeln" geschlossen werden. Der Fehlschluß wirkt sich unter anderem dahin aus, daß Aharoni die Möglichkeit eines negativen Wertes für die als „c^{-2}" bezeichnete Konstante nicht in Betracht zieht.

[20] J. Aharoni, The Special Theory of Relativity, Clarendon Press, Oxford 1965.

* Zusatz b. d. Korr.: Von den Herren K. Helmers, U. E. Schröder und H. Steinwedel wurde ich (in Antworten zu einem Vorabdruck dieser Arbeit) dankenswerterweise auf folgende Veröffentlichungen aufmerksam gemacht, in denen ähnliche Überlegungen zu finden sind: W. v. Ignatowsky, Arch. Math. Phys. **17,** 1 [1910], **18,** 17 [1911], Phys. Z. **11,** 972 [1910], **12,** 779 [1911]; Ph. Frank u. H. Rothe, Ann. Phys. **34,** 825 [1911], Phys. Z. **13,** 750 [1912]; E. Wiechert, Phys. Z. **12,** 689, 737 [1911]; Y. P. Terletskii, Paradoxes in the Theory of Relativity, Plenum Press, New York 1968, § 7; H. Arzeliès, Relativistic Kinematics, Pergamon Press, Oxford 1966, § 53 mit ausführlicher Literaturliste. In den genannten Arbeiten wird keine Begründung dafür gegeben, daß die Konstante ε_0 nicht negativ ist, und die Rechnungen sind komplizierter. — Herrn H. Kastrup verdanke ich den Hinweis auf H. Barcy u. Lévy-Leblond, J. Math. Phys. **9,** 1605 [1968].